

ДЖОРДАН ЕЛЛЕНБЕРГ

ЯК НІКОЛИ НЕ ПОМИЛЯТИСЯ

СИЛА МАТЕМАТИЧНОГО
МИСЛЕННЯ

*Переклав з англійської
Андрій Іщенко*

«НАШ ФОРМАТ» · Київ · 2017

[Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>](http://kniga.biz.ua)

Де мені це знадобиться?

Саме зараз десь у світі студентка огризається до викладача математики. Викладач щойно задав їй обчислити тридцять визначених інтегралів, на що піде добрий шмат вихідних.

Є речі, які студентка робила б із більшою охотою. Насправді вона робила б майже що завгодно. Вона в цьому впевнена, бо провела добрий шмат попередніх вихідних за обчисленням інших — але не *надто* відмінних — тридцяти визначених інтегралів. Тому не бачить у цьому сенсу, про що їй каже викладачеві. І в якийсь момент розмови студентка поставить запитання, якого викладач боїться найбільше:

«Де мені це знадобиться?»

Імовірно, викладач математики скаже щось таке:

«Знаю, що це видається вам нудним, але пам'ятайте, що ви не знаєте, якою буде ваша майбутня робота — зараз ви не бачите в цьому сенсу, але, можливо, на вашій роботі виявиться, що це має справді велике значення — правильно і швидко вручну обчислювати визначені інтеграли».

Така відповідь рідко задовольняє студентку. Тому що це — брехня. І викладач, і студентка обоє це знають. Кількість дорослих, які коли-небудь скористаються інтегралом $(1 - 3x + 4x^2)^{-2} dx$, або формулою косинуса 3θ , або синтетичним діленням многочленів, можна порахувати на пальцях кількох тисяч рук.

Брехня не дуже задовольняє і викладача. Кому, як не мені, знати: за багато років викладання математики я задавав обчислення визначених інтегралів багатьом сотням студентів.

На щастя, є краща відповідь. Десь така:

«Математика — це не просто послідовність обчислень, які потрібно зубрити, поки у вас забракне терпіння чи сил — хоча, можливо, саме так вас учили в курсі *математики*. Ці інтеграли для математики — як силові вправи і загальна фізична підготовка для футболу. Якщо ви хочете грати у футбол — маю на увазі *справді грати*, на рівні змагань, — потрібно робити багато нудних, однакових, начебто безглузвих вправ. Чи *використовують* коли-небудь професійні гравці ці тренувальні вправи? Ну, ви ніколи не побачите

на полі гравця, що тягне гантелі чи оббігає конуси. Але ви побачите, як гравці використовують силу, швидкість, реакцію і гнучкість, які вони випрацювали цими тренуваннями — довгими тижнями виснажливих тренувань. Ці вправи — підготовка до футболу.

Якщо ви хочете заробляти футболом на життя чи навіть просто грати в університетській команді, вам доведеться віддати багато вихідних нудним тренуванням. По-іншому не вийде. Але є й добра новина. Якщо так тренуватися — це для вас занадто, ви все одно зможете грати у футбол для задоволення, із друзями. Ви зможете радіти вправному пасу між захисниками або результативному удару з далекої відстані, доступним тільки справжнім спортсменам. Ви будете здоровішим і щасливішим, ніж якби просто сиділи вдома і дивилися гру професіоналів по телевізору.

Математика — багато в чому те саме. Ви можете не мати на меті отримати роботу, пов'язану з математикою. Це нормально — більшість людей не мають такої мети. Але ви можете займатися математикою. Ймовірно, ви *вже займаєтесь* математикою, навіть якщо цього не усвідомлюєте. Математика вплетена у те, як ми мислимо. І математика вам допомагає. Знати математику — це як надягти рентгенівські окуляри, які відкривають структуру, приховану за незугарною й хаотичною поверхнею світу. Математика — це наука не помилятися, її прийоми і методи віками виковувалися тяжкою працею і запеклими суперечками. Маючи під рукою математичний інструментарій, ви зможете розуміти світ глибше і краще. Усе, що потрібно — це тренер чи просто книжка, які навчать вас правил і головних прийомів. Я буду тренером. Покажу вам, як».

Через брак часу я рідко кажу таке в аудиторії. Книжка дає трохи більше простору. Я сподіваюся підкріпити щойно зроблені гучні заяви, показуючи, як проблеми, що повсякчас постають перед нами — у політиці, медицині, бізнесі, богослов'ї, — вирішуються за допомогою математики. Зрозумівши це, ви отримаєте доступ до ідей, не досяжних жодним іншим способом.

Навіть якби я виголосив цю наснажливу промову повністю, мою студентку — якщо вона справді має гострий розум — це, напевно, не переконає.

«Усе так, професоре, — скаже вона. — Але дуже абстрактно. Ви кажете, що за допомогою математики можете зрозуміти щось правильно, а без неї — неправильно. Що саме? Наведіть *приклад із життя*».

І тоді я розповім їй історію Абрагама Вальда і відсутніх кульових пробоїн.

АБРАГАМ ВАЛЬД І ВІДСУТНІ КУЛЬОВІ ПРОБОЇНИ

Ця історія, як і багато історій періоду Другої світової війни, починається з переслідування нацистами єврея, а закінчується тим, що їм це обернулося на

гірше. Абрагам Вальд народився 1902 року¹ у місті, яке звалось тоді Клаузенбургом, у країні, яка мала тоді назву Австро-Угорської імперії. Коли Вальд був підлітком, Перша світова війна змінила назву його рідного міста на Клуз, а країни — на Румунію. Онук рабина і син кошерного пекаря, Вальд-молодший майже від самого початку був математиком. Його талант швидко помітили, і він вступив до Віденського університету, де взявся за вивчення тем, які вважаються абстрактними і тяжкими навіть за стандартами чистої математики — теорії множин і метричних просторів.

Та коли Вальд закінчив навчання, була середина 1930-х років, Австрія потерпала від глибокої економічної кризи, а стати професором у Відні іноземцеві було неможливо. Врятувала Вальда пропозиція роботи від Оскара Моргенштерна. Згодом Моргенштерн виїде до Сполучених Штатів, де братиме участь у розробці теорії ігор, але 1933 року він обіймав посаду директора Австрійського інституту економічних досліджень і взяв Вальда на роботу з маленькою зарплатнею, «математичним підсобником». Як виявилось, для Вальда це було добрим кроком: його досвід в економіці допоміг отримати стипендію від Комісії Коулза, економічного інституту, розташованого тоді в Колорадо-Спрингс. Незважаючи на постійне погіршення політичного становища, Вальд не хотів робити крок, який змусить його назавжди залишити чисту математику. Але зрештою нацисти захопили Австрію, і це допомогло Вальду визначитися. Уже через кілька місяців у Колорадо йому запропонували посаду професора статистики в Колумбійському університеті; він ще раз спакував валізи і переїхав до Нью-Йорка.

І саме там йому довелося воювати.

Група статистичних досліджень (ГСД)², у якій Вальд працював більшу частину Другої світової війни, являла собою секретну програму, яка мобілізувала американських статистиків для роботи на війну — щось на зразок Мангеттенського проекту, за винятком того, що тут розробляли бойові ривняння, а не вибухові пристрої. ГСД справді розташовувалася на Мангеттені, у будинку № 401 по 118-й вулиці, на Морнігсайд Гайтс, лише за квартал від Колумбійського університету. Сьогодні тут квартири викладачів університету та кілька приймалень лікарів, але 1943-го це був постійно заклопотаний нервовий центр військової математики. У Групі прикладної математики Колумбійського університету десятки молодих дівчат, схилившись над настільними калькуляторами Маршана, обчислювали формули для оптимальної кривої, рухаючись якою, винищувач найдовше триматиме ворожий літак на прицілі. В іншому приміщенні група дослідників з Принстона розробляла інструкції для стратегічних бомбардувальників. А просто за сусідніми дверима Колумбійське відділення працювало над створенням

Однак ГСД була найпотужнішою і зрештою найвпливовішою з усіх цих груп. Тут поєднувалися інтелектуальна відкритість і інтенсивна праця академічної установи з відчуттям спільної мети, яке дає тільки велика відповідальність. «Коли ми давали рекомендації, — пише керівник ГСД В. Аллен Волліс, — часто це мало результат. Боезапас винищувачів за рекомендаціями Джека Вулфовіца* був укомплектований різними типами боеприпасів, і пілоти могли повернутися або не повернутися. Літаки морської авіації випускали ракети, пальне яких перевірялося за планом вибіркового контролю Ейба Гіршика, і ракети могли вибухнути і зруйнувати наші літаки, а могли уразити цілі»³.

Математичні таланти, задіяні у роботі, відповідали серйозності завдання. За словами Волліса, ГСД була «найвидатнішою групою статистиків усіх часів, і за кількістю, і за якістю»⁴. Там працював Фредерік Мостеллер, який згодом організує факультет статистики у Гарварді. А ще Леонард Джиммі Севідж, піонер теорії прийняття рішень і великий прихильник наукової дисципліни, яка отримала назву Баєсової статистики**. Часом забігав математик з МІТ Норберт Вінер, творець кібернетики. Це була група, у якій майбутній нобелівський лауреат з економіки Мілтон Фрідман часто виявлявся четвертою найрозумнішою людиною.

Найрозумнішим із присутніх зазвичай був Абрагам Вальд. Вальда, викладача Аллена Волліса в Колумбійському університеті, у групі вважали таким собі математичним світилом. Він усе ще був «громадянином ворожої держави» і формально не мав допуску до секретних документів, які сам же й готував; у ГСД жартували⁵, що секретарям наказали виривати в нього з рук кожну сторінку записника, щойно він закінчить на ній писати. Вальд був тут до певної міри несподіваним персонажем. Його вабила абстракція, а не прикладні задачі. Утім очевидним було і його прагнення застосувати свої таланти у боротьбі проти нацистів. А коли потрібно було надати неясній ідеї математичної точності, саме Вальда краще було мати на своєму боці.

Отже, про що йдеться?⁶ Ви не хочете, щоб ворожі винищувачі збивали ваші літаки, і тому ви їх бронюєте. Але броня робить літак тяжчим, а тяжчі літаки менш маневрені, і їм потрібно більше пального. Надмір броні на літаку — проблема; брак броні на літаку — теж проблема. Оптимальне рішення десь посередині. Причина, з якої ви зібрали групу математиків у нью-йоркській квартирі, — знайти це оптимальне рішення.

* Батько Пола.

** Севідж був майже зовсім сліпим, бачив лише куточком одного ока. Якось він прожив шість місяців на самих лише індіанських харчах, щоб довести свою думку про дослідження Арктики. Просто подумав, що це варто згадати.

Військові прийшли до ГСД із корисними, на їхню думку, даними. Американські літаки поверталися з боїв над Європою, всіяні кульовими пробоїнами. Однак ушкодження не розподілялися рівномірно по корпусу літака. У фюзеляжах пробоїн було більше, у моторних відділеннях менше.

| Частина літака | Кількість пробоїн на квадратний фут |
|-----------------|--|
| Двигун | 1,11 |
| Фюзеляж | 1,73 |
| Паливна система | 1,55 |
| Решта літака | 1,8 |

Військові вважали, що є можливість для оптимізації: можна отримати той самий захист меншим обсягом броні, якщо зосередити її у місцях, де вона потрібна більше — там, де літаки отримують найбільше ушкоджень. Але скільки саме потрібно броні для цих частин літака? По відповідь вони і прийшли до Вальда. На це питання відповіді вони не отримали.

Вальд сказав, що бронювати частини, де є пробоїни, не потрібно. Бронювати потрібно ті, де пробоїн *немає*: двигуни.

Ідея Вальда полягала у простому питанні: куди щезають пробоїни, яких бракує? Ті, які були б на всьому корпусі, якби ушкодження розподілялися по ньому рівномірно? Вальд мав цілковиту певність, що знає це. Пробоїни, яких бракувало, були на відсутніх літаках. Причина того, що літаки поверталися з меншою кількістю пробоїн у моторних відділеннях, полягала в тому, що літаки з пробоїнами у двигунах не поверталися. Тоді як велика кількість літаків, що поверталися на аеродроми з порешеченими фюзеляжами, являла собою доказ того, що з пробоїнами у фюзеляжі можна (а тому потрібно) миритися. У післяопераційних палатах госпіталів набагато більше пацієнтів з пробитими кулями ногами, ніж грудьми. Та це не тому, що солдати не отримують поранень у груди, а тому, що ті, кого поранило у груди, до післяопераційної палати не доживають.

Існує старий математичний прийом, що проясняє картину гранично чітко: *прирівняти деякі змінні до нуля*.

У нашому випадку така змінна — це ймовірність того, що літак, який отримав ураження двигуна, залишається у повітрі. Прирівняти ці змінні до нуля означає, що єдине ураження двигуна гарантовано збиває літак. Як у такому разі виглядатимуть дані? Тоді б були літаки, що повертаються на аеродром із пробоїнами у крилах, фюзеляжі, носі — але без жодної пробоїни у двигуні. Військові аналітики мали два варіанти пояснення цього: або німецькі кулі влучають в усі частини літаків, за винятком однієї, або двигун є місцем стовідсоткової вразливості. Обидва варіанти пояснюють отрима-

ні дані, але останнє набагато достовірніше. Бронювати треба там, де пробоїн немає.

Рекомендацію Вальда було швидко втілено в життя; вона використовувалася у військовій авіації під час Корейської і В'єтнамської війн⁷. Не можу точно сказати, скільки американських літаків було врятовано, проте, поза сумнівом, наступники ГСД у сьогоdnшній армії знають це достеменно. Американські військові традиційно дуже добре усвідомлюють одну річ: країни перемагають у війнах не через те, що вони хоробріші або вільніші за супротивника, чи тому, що Бог до них трішечки ласкавіший. Переможці, як правило, — це ті хлопці, чиїх літаків збивають на 5 % менше, хто використовує на 5 % менше пального, хто дає на 5 % більше харчів своїй піхоті за 95 % вартості. Цього не побачиш у кінофільмах про війну, але саме з цього робиться війна. І на кожному кроці тут — математика.

Чому Вальд розумів те, чого не розуміли військові, що значно більше за нього знали про війну в повітрі? Усе зводиться до натренованого математиком способу його мислення. Математик завжди запитує: «З яких припущень ви виходите? Чи обґрунтовані вони?» Це може дратувати. Але це водночас може бути надзвичайно продуктивним. У нашому випадку військові мимохіть робили припущення: літаки, які повертаються з бою, становлять випадкову вибірку всіх літаків. Якби це було так, можна було б робити висновки про розподіл кульових пробоїн на всіх літаках за розподілом пробоїн на тих, що повернулися. Тільки-но ви розумієте, що висуває таку гіпотезу, відразу стає ясною її докорінна хибність; немає жодної підстави вважати, що літаки мають однаковий шанс не бути збитими безвідносно до того, куди саме вони утримують ураження. Математичною мовою, до якої ми повернемося у розділі 15, кажуть, що між показниками виживання літаків і місцями уражень *існує кореляція*.

Ще одна перевага Вальда полягала у його схильності до абстракції. Вулфовіц, який учився у Вальда в Колумбійському університеті, пише, що він найбільше полюбляв задачі «найабстрактнішого ґатунку»⁸ і що він «завжди охоче говорив про математику, але не був зацікавлений у її популяризації і практичному застосуванні».

Через такий характер Вальдові було тяжко зосереджуватися на прикладних завданнях, це правда. Він вважав, що подробиці щодо літаків, кулеметів і гармат були зайвими — його погляд проникав безпосередньо до математичної структури, на якій усе тримається. Часом через такий підхід можна не помітити того, що має значення. Але він також дає змогу бачити спільну основу проблем, які з поверхового погляду здаються цілковито різними. Таким чином виявляється, що ви маєте важливий досвід навіть у тому, де, здається, не маєте жодного.

Для математика в основі задачі про кульові пробоїни лежить явище, що має назву *систематична помилка уцілілого*. Вона виникає знову і знову, у найрізноманітніших умовах. І якщо ви з нею знайомі, як був знайомий Вальд, ви її помітите, хай там де вона ховається.

Наприклад, у пайових інвестиційних фондах. Оцінка діяльності фондів — це сфера, у якій не хочеться припускати помилки, навіть незначної. Різниця в 1 % річного зростання може бути різницею між цінним активом і безперспективною інвестицією. Великі фонди, представлені в рейтингу агентства «Морнінгстар», які здійснюють взаємні інвестиції у великі компанії, що приблизно відповідають спискові S&P 500, виглядають як перше. Фонди цієї категорії продемонстрували у період 1995–2004 років середнє зростання в 178,4 %, у середньому добрі 10,8 % на рік*. Начебто виглядає так, що, коли маєш гроші, то потрібно інвестувати у ці фонди, хіба ні?

А от і ні. Дослідження 2006 року компанії «Сейвант Кепітал»⁹ допомагає подивитися на представлені цифри дещо тверезіше. Ще раз погляньмо, як агентство «Морнінгстар» отримує ці показники. 2004 рік: беремо всі фонди згаданої категорії агентства «Морнінгстар» і дивимось, як вони зростали протягом останніх десяти років.

Але чогось бракує: *фондів, яких там немає*. Фонди взаємного інвестування не існують вічно. Хтось процвітає, хтось зникає. Ті, що зникають, переважно не заробляють грошей. Тож оцінювати десятилітню вартість фондів взаємного інвестування в кінці десятирічного періоду — це, зрештою, те саме, що оцінювати маневри ухилення пілотів, рахуючи кульові пробоїни на літаках, що повернулися з бою. Що значить, коли на літак припадає не більше за одну пробоїну? Не те, що наші льотчики так майстерно ухиляються від ворожого вогню, а те, що коли літак отримує два ураження, то він загоряється й падає.

Дослідження компанії «Сейвант» показує, що якби нарівні з діючими було враховано діяльність зниклих фондів, показник рентабельності знизився б до 134,5 % — набагато більш звичайні 8,9 % на рік. Це підтверджується і результатами новішого дослідження: масштабне дослідження 2011 року, здійснене виданням «Рев'ю оф Файненс»¹⁰, яке охопило майже 5 тисяч фондів, свідчить, що показник перевищення середньої рентабельності 2641 діючого фонду є приблизно на 20 % вищим, ніж той самий показник, обчислений з урахуванням фондів, яких уже немає. Розміри ефекту систематичної помилки уцілілого можуть здивувати інвесторів, але Абрагама Вальда вони б не здивували.

* Якщо чесно, то сам рейтинг S&P 500 показує ще краще зростання — 212,5 % за той самий період.

ДЕ МЕНІ ЦЕ ЗНАДОБИТЬСЯ?

МАТЕМАТИКА — ЦЕ ПРОДОВЖЕННЯ ЗДОРОВОГО ГЛУЗДУ ІНШИМИ ЗАСОБАМИ

У цей момент моя молода співрозмовниця зупинить мене і запитає (цілком слушно): а де математика? Вальд був математиком, це правда. Також не можна заперечити, що він знайшов неординарне рішення проблеми кульових пробойн, але що тут математичного? Тригонометрії немає, немає ні інтегралів, ні нерівностей, ні формул.

По-перше: Вальд користувався формулами. Я розповів історію без них, тому що це тільки вступ. У вступі до книжок про розмноження людей для дошкільнят уся гідравліка процесу, як малюк потрапляє до маминого живота, оминається. Замість неї пишуть щось таке: «Усе в природі змінюється; на зиму листя з дерев опадає, щоб знову з'явитися тільки навесні; скромна гусінь стає лялечкою, щоб знову з'явитися вже чудовим метеликом. Ти теж частина природи, і...»

Зараз ми в цій частині книжки.

Але ми дорослі. Наведімо на секунду потрібну різкість: ось як виглядає приклад сторінки зі справжнього звіту Вальда¹¹:

Можна отримати нижню межу Q_i . Припускаємо, що різниця між q_i і q_{i+1} лежить у визначених межах. Отже, для Q_i можна знайти і верхню, і нижню межі.

Припустимо, що

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i$$

де $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$, і виконуються умови такого виразу:

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_1 \frac{j(j-1)}{2}} < 1 - a_0. \quad (\text{A})$$

Строге рішення є клопітким, однак наближені значення нижньої і верхньої меж Q_i для $i < n$ можна отримати за допомогою такої процедури. Маємо гіпотетичні дані:

| | |
|--------------------|--------------------|
| $a_0 = 0,780$ | $a_3 = 0,010$ |
| $a_1 = 0,070$ | $a_4 = 0,005$ |
| $a_2 = 0,040$ | $a_5 = 0,005$ |
| $\lambda_1 = 0,80$ | $\lambda_2 = 0,90$ |

Умова А задовольняється, оскільки підстановкою отримуємо.

$$0,07 + \frac{0,04}{0,8} + \frac{0,01}{(0,8)^3} + \frac{0,005}{(0,8)^6} + \frac{0,005}{(0,8)^{10}} = 0,20529,$$

що менше за

$$1 - a_0 = 0,22.$$

НИЖНЯ МЕЖА Q_1

Спочатку розв'яжемо рівняння 66. Це передбачає розв'язання таких чотирьох рівнянь з додатними коренями g_0, g_1, g_2, g_3 .

Сподіваюся, це не було надто жахливим.

Проте думка, що лежить в основі ідеї Вальда, не потребує формул. Ми вже її пояснили, без жодних математичних записів. Тож запитання студентки залишається. Що робить математику математикою? Хіба це не просто здоровий глузд?

Так. Математика — це здоровий глузд. Це ясно на певному базовому рівні. Як комусь пояснити, чому додавання семи речей до п'яти дає той самий результат, що і додавання п'яти до семи? Це неможливо: цей факт вбудовано в наше уявлення про поєднання речей. Математики люблять давати назви явищам, які описує наш здоровий глузд: замість того щоб сказати «Додати цю річ до тієї, це те саме, що ту до цієї», ми кажемо: «Додавання є комутативним». Чи, оскільки ми ще й любляємо символи, пишемо:

$$\text{Для будь-яких } a \text{ і } b: a + b = b + a.$$

Незважаючи на офіційний вигляд формули, ми говоримо про факт, інстинктивно зрозумілий кожній дитині.

Множення трішки інше. Формула виглядає дуже схоже:

$$\text{Для будь-яких } a \text{ і } b: a \times b = b \times a.$$

Аналізуючи це твердження, наш розум не каже «Та це ж ясно!» так само миттєво, як у попередньому випадку. Чи погодиться здоровий глузд, що дві групи з шести речей — те саме, що й шість з двох?

Можливо, ні; але це може стати здоровим глуздом. Ось мій перший математичний спогад. Я лежу на підлозі у помешканні батьків, щода на килимку, дивлюся на колонку стереосистеми. Дуже ймовірно, що слухаю другий бік «Синього альбому» «Бітлз». Мені, напевно, шість років. Це сімдесяті роки, тому колонку вмонтовано у ДСП, яка збоку має прямокутну решітку отворів для повітря. Вісім отворів по горизонталі, шість по вертикалі. Тож я лежу і дивлюся на ці отвори. Шість рядів отворів. Вісім колонок отворів. Фокусуючи зір, я бачу то рядки, то колонки. Шість рядів по вісім отворів. Вісім колонок по шість отворів.