ЗМІСТ

Передмова 9

Розділ 1. Оптимізація та образотворче мистецтво? 11

Розділ 2. Плитки Трюше 16
Цільове зображення 20
Еластичні плитки Трюше 21
Математичне моделювання 26
Інша система побудови мозаїки:
еластичні зіркоподібні плитки 31
Шахові чотирикутні плитки 36

Розділ 3. Лінійна оптимізація та задача LEGO 38
Більше різних виробів — більше змінних 42
Алгоритм симплекс-методу 45
Механізм алгоритму симплекс-методу 46
Програмне забезпечення лінійної оптимізації 51
Безперервна або ж дискретна лінійна оптимізація 53
Підсумок 62

Розділ 4. Задача лінійного розподілу та мультяшні мозаїки 64
Мультяшні мозаїки 70

Розділ 5. Мозаїки доміно 76
Приклади 90

Розділ 6. Від задачі комівояжера до креслення
безперервних ліній 93
Розв'язання ЗКВ за допомогою лінійної оптимізації 94
Розгалуження та вирізання 100
Креслення безперервних ліній 107
Стиплінг 111
Галерея прикладів 115
Виклик «Мона Ліза й ЗКВ» 118

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

Розділ 7. Мистецтво задачі комівояжера з бічними обмеженнями 120
Керування входом і виходом із маршруту 124
Приклади 126
Симетричні маршрути 129

Розділ 8. Маршрути ходом коня 136

Розділ 9. Проєктування лабіринту з теселяцією та узгодженням візерунків 145
Лабіринтові плитки 148

Розділ 10. Мозаїки з бічними обмеженнями 155
Розфарбовування географічної карти 155
Узгодження візерунків 164

Розділ 11. Мозаїки «Гра життя» 176
Натюрморт із плиток 177
Створення плиток для натюрмортів 181
Мозаїки з Фенікс-плиток 185
Двокадрові анімації 186

Післямова. Краса та корисність 191

Бібліографія 193

Алфавітний покажчик 195

ПЕРЕДМОВА

Ця книжка є звітом про мої нескінченні дослідження щодо того, як можна використати відомі з математики та інформатики методи оптимізації для кодування творів зображувального мистецтва. Вона містить багато рівнянь і нерівностей, але всі вони лінійні, тобто найпростіші та найлегші для розуміння. А ще ви знайдете в ній сотні зображень, переважну більшість з яких я створив, користуючись описаними тут методами.

Наприкінці книжки є довгий перелік посилань для всіх, хто забажає глибше зануритися в більш технічні праці на цю тему. Багато розділів виросли зі статей, які я писав для циклу конференцій «Мости від математики до мистецтва» та для *Journal of Mathematics and the Arts*.

Я отримав надзвичайну користь від співпраці з багатьма чудовими, блискучими й творчими людьми, як-от Курт Анстрейхер, Дерек Бош, Тім Чартьє, Мартін Хлонд, Роберт Фатхавер, Крейг Каплан, Роберт Ленг, Даг Макена, Генрі Сегерман, Майкл Трік, Том Векслер і мої нинішні та колишні студенти Мелані Харт Бюлер, Майкл Кардіфф, Абагаель Чен, Адрієнн Герман Коен, Урчин Коллі, Сара Фріс, Ґвінет Ґ'юз, Сейдж Дженсон, Аарон Крейнер, Нікрад Махді, Джулія Олів'єрі, Ендрю Пайк, Менека Пулігандла, Карен Ресслер, Майкл Ровен, Гаррі Рубін-Фальконе, Рейчел Шварц, Арі Сміт, Джейсон Сміт, Наташа Стаут, Ельберт Цай та Чжифу Сяо.

Я надзвичайно вдячний своїм колегам з Оберлінського коледжу — викладачам, персоналу та студентам — і моїм друзям у «Мостах» та спільнотам «Збори заради Гарднера» (G4G). Я однаково вдячний команді *Concord* Вільяма Кука та *Gurobi Optimization* за те, що дозволили мені користуватися їхніми надзвичайними програмними пакетами, а також Вікі Кірн, Сюзанні Шумейкер, Лорен Букка та решті приголомшливої команди видавництва *Princeton University Press* (Марк Белліс, Елізабет Блажеєвскі, Елісон Дарем, Кріс Ферранте, Сара Хеннінг-Стаут, Димитрій Каретников, Меган Канабей, Кеті Льюїс, Джекі Пуаре, Кетрін Стівенс, Ерін Зюдам і Метью Тейлор) за

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

їхні досвід, ентузіазм і терпіння. Без Оберлінського коледжу, «Мостів», *G4G*, *Concord*, *Gurobi* та *PUP* я не спромігся б здійснити цей проєкт.

Я навіть не міг би передбачити цей проєкт, якби не побачив робіт Кена Нолтона, піонера комп'ютерної графіки та надзвичайного майстра мозаїки. Його доміношні мозаїки приголомшили мене, коли я вперше побачив їх у віці 17 років, і знову — у 21 рік, а потім утретє, у 37 років, коли я нарешті зрозумів, що вже опанував математичні інструменти для отримання можливості робити таке самостійно.

Я не мав би впевненості, що можу взяти участь у цьому проєкті, якби не зустрів Аналісу Креннелл та Марка Франца і не взяв участь у їхньому семінарі 2005 року «Майстерня погляду» в коледжі Франкліна та Маршалла.

І я не взявся б за цей проєкт без заохочення з боку тих, хто замовляв твори мистецтва; вони виставляли мої роботи; запрошували мене проводити бесіди або семінари; розмовляли зі мною про математику, мистецтво або писання; ставили запитання, які підштовхували мене зануритися глибше; оцінювали частини рукопису; або просто казали мені продовжувати. Тож зараз дякую родинам Бошів та Фрідів, Джиму та Деббі Волшам, Лорі Альберт, Роджеру Антонсену, Пау Ателі, Джулі Беєр, Ніку Беннету, Шерон Блечер, Гейл Бертон, Кейсу Коноверу, Біллу Куку, Ренді Коулману та Ребецці Крос, Саймону Евер-Гейлу, Івен Фішер, Джуліану Флерону, Нату Фрідману, Джою Гонсалес-Донесу, Сьюзен Голдстайн, Генрі Ліоні Гассу, Джеймсу Гіру, Джорджу Гарту, Елісон Генріх, Джуді Холденер, Джеррі Джонсону, Аві Кітінґ, Джошу Лейсону, Сінді Лоуренс, Ерін Макадамс, Дагу Макені, Колму Малкахі, Майку Нейлору, Джеймсу Піку, Дженніфер Квін, Дані Рендалл, Резі Сарханді, Дж. Коулу Сміту, Девіду Сворту, Девіду Сталлу, Єві Торренс, Майку Тріку, Джону Воткінсу, Керолін Яккель та семи анонімним рецензентам моєї книжкової пропозиції та рукопису.

Ця книжка була справою любові, і, як і більшість таких праць, вона підживлювалася цим дивовижним почуттям: любов'ю моєї матері Шарлотти Вебке Бош (1933–2016); любов'ю мого брата Дерека Боша; любов'ю мого сина Діми Боша; а особливо любов'ю моєї найкращої подруги, дружини, спорідненої душі й нескінченного джерела натхнення — Кеті Бош.

РОЗДІЛ 1

Оптимізація та образотворче мистецтво?

Оптимізація — це галузь математики та інформатики, яка присвячена досягненню оптимальних результатів та пошуку найкращого способу виконання завдання. Вона є цілком прикладною, бо кожен з нас час від часу намагається виконати якесь завдання на найвищому можливому рівні. Наприклад, компанія автомобільних перевезень *UPS* може в такий спосіб розмістити зупинки, щоби мінімізувати загальну відстань подорожі, час перебування в дорозі, витрати пального, викиди шкідливих речовин або навіть кількість лівих поворотів. Відшукування оптимального маршруту, або принаймні близького до оптимального, задовольнить не лише водія та компанію *UPS*, але також її клієнтів (завдяки зниженим цінам) та решту суспільства (завдяки зменшенню викидів).

Деякі задачі оптимізації є простими, інші — надзвичайно складними. Це переважно залежить від *обмежень* — правил, вимог, заборон, які накладаються на основне завдання. Якщо кожна зупинка в переліку водія компанії *UPS* розташована на тій самій магістралі, тоді пошук оптимального маршруту — і доказ, що він дійсно є оптимальним,— задача тривіальна. Але якщо в місті безліч вулиць з одностороннім рухом, зупинки розкидано по всьому населеному пункту і деякі з них необхідно — або бажано — зробити в певні часові вікна, тоді для визначення способу виконання цього завдання на високому рівні можуть знадобитися значна винахідливість розробника алгоритму та серйозні обчислювальні потужності.

Оптимізацію успішно застосовують у великій кількості різноманітних дисциплін: від реклами, сільського господарства, біології, бізнесу, економіки, машинобудування до медицини, телекомунікацій та транспорту. Численні чудові книжки описують ці важливі, практичні програми, і якщо ви звернетеся до бібліографії, то знайдете мої улюблені.

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

Книжка, яку ви зараз читаєте, зовсім інша. Це дуже особистий звіт про мою більш ніж шістнадцятирічну одержимість використанням математичних і комп'ютерних методів оптимізації для створення творів візуального, тобто зображувального мистецтва. Що ж до одержимості, то в помірній кількості вона не є шкідливою і не настільки дивна, як здається! На цих сторінках я наведу докази, які підтверджують сміливу думку, що математичний оптимізатор і художник мають більше подібностей, ніж відмінностей.

Математичний оптимізатор вивчає завдання, які містять оптимізацію — тобто максимізацію або мінімізацію — деякої кількості показників (наприклад, прибуток або собівартість у завданнях бізнесу). Мета оптимізатора — знайти оптимальне розв'язання, можливо, спосіб зробити прибуток якомога більшим або собівартість якомога нижчою. У деяких ситуаціях оптимізатор буде задоволений *локальним оптимумом*, тобто розв'язанням, яке краще за всі сусідні. Якщо ви знайдете локальний оптимум, то можете бути впевнені: коли ви представите його раді директорів, що жоден із них не зможе поліпшити ваше розв'язання якимись незначними налаштуваннями. Але в інших ситуаціях оптимізатори не знатимуть відпочинку, поки не знайдуть *глобальний оптимум*, або ж розв'язання, яке — доказово! — є кращим, ніж будь-яке інше. Якщо ви знайдете глобальний оптимум, то зможете спокійно спати всю ніч перед засіданням ради, бо будете впевнені, що ніхто там — та навіть де завгодно! — не зможе знайти кращого розв'язання, ніж ваше.

Художник також стикається із завданнями й шукає високоякісних розв'язань. Створення мистецького твору можна вважати задачею, яку потрібно розв'язати. І досить важко уявити художника, який, створюючи свою картину, скульптуру тощо, не намагається зробити все можливе? Для деякої невеликої кількості митців метою може бути максимізація прибутку, але для більшості ціль — зробити твір якомога красивішим або досягти якомога більшого емоційного впливу на глядачів. Красу та емоційний вплив неможливо визначити кількісно, але майже всі ми бачили й чули критика, завсідника музею або балакуна, який відвідує галерею та в пориві ентузіазму вибулькує щось на кшталт: «Хіба ж ви не *закохались* у цей твір? Чи не вважаєте ви, що якби художник додав до нього ще щось або щось пропустив, цей шедевр вже не мав би такого самого впливу?» (Для математичного оптимізатора — це твердження про локальну оптимальність.)

Математичні оптимізатори пам'ятають про роль, яку відіграють обмеження. Вони знають, що в деяких ситуаціях, якщо накласти додаткові обмеження на завдання оптимізації, воно стане набагато складнішим, але в інших випадках — значно легшим. Здається деякі обмеження структуровано в такий спосіб, що в їхній присутності алгоритми зустрічали якомога більше перешкод, прокладаючи шлях до найкращої частини *області допустимих розв'язків* (множини всіх можливих розв'язків, тобто таких, які задовольняють усім обмеженням), тоді як інші обмеження є еквівалентами опор для рук і ніг скелелаза, які утворюють легкий шлях до оптимальності.

Художники так само уважні. Вони добре усвідомлюють, що мусять зважати на обмеження. Художники повинні працювати в рамках бюджетів. Вони мусять дотримуватися термінів. Якщо художники хочуть узяти участь у змаганнях або конкурсах, то повинні переконатися, що їхні твори відповідають правилам участі. Якщо вони беруть комісійні, то мають виконувати вказівки своїх клієнтів. І незалежно від того, з якими засобами масової інформації вони вирішили працювати, художники мусять боротися з певними обмеженнями, накладеними законами фізики, які регулюють роботу цих засобів. Живопис аквареллю відрізняється від живопису олією, а малювання на рисовому папері — від малювання на полотні.

Тож беручи до уваги, що художники — люди творчі, ми могли би подумати, що — якби це залежало від них — вони позбулися б обмежень. Зрештою, обмеження стримують. Вони забороняють. Вони зменшують наш вибір. Здавалося б, обмеження придушують творчість.

Але насправді існує безліч доказів протилежного. Багато художників радо сприймають обмеження. Комусь потрібні терміни, щоби мати змогу закінчити свою роботу, а деякі вважають, що коли їхній вибір обмежено, вони стають набагато цілеспрямованішими та креативнішими. Джозеф Хеллер (перефразовуючи Т. С. Еліота) писав:

> Коли змушують працювати в суворих рамках, уява напружується до максимуму — і буде виробляти найбагатші ідеї.

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

А психолог Ролло Мей зазначав:

> Творчість виникає внаслідок напруженості між спонтанністю та обмеженнями, останні (як і береги річок) примушують спонтанність до різних форм, які є суттєвими для твору живопису чи поеми.

Насправді багато художників доходять до того, що створюють власні обмеження. Згадаймо Жоржа-П'єра Сера. Розглядаючи зблизька його картину «Недільний день на острові Гранд-Жатт — 1884», ви виявите масу різнокольорових крапок.

Відступаючи від неї, ви побачите, що всі крапки зливаються в зображення групи парижан, які відпочивають на острові на Сені. Щоби створити цей шедевр, Сера поставив перед собою завдання якнайкраще виконати можливе зображення того, що він бачить на березі річки, беручи до уваги два вкрай суворі й висунуті ним самим обмеження: необхідно було тримати кольори окремо, і наносити фарбу на полотно лише крихітними, точними, схожими на крапки мазками пензля. Само обмеження Сера породили захопливий витвір мистецтва, найбільш широко відтворений приклад того, що ми зараз називаємо пуантилізм.

На арені мозаїчного мистецтва існує багато самообмежень. Щоразу, коли майстер мозаїки заявляє: «Я створю мозаїку з _____», народжується (або принаймні планується) чергове самообмеження. 400 року до н. е. давні греки створювали мозаїки з різнокольорових камінчиків, а приблизно 200 року до н. е. вони почали складати їх зі спеціальних плиток (тессер), виготовлених із кераміки, каменю чи скла. Сучасні майстри мозаїки все ще застосовують ці традиційні матеріали, але також усе, що є в них під рукою: кубики, кісточки доміно, цеглинки LEGO, кубики Рубіка, іграшкові машинки, котушки ниток, бейсбольні картки, світлини та навіть окремі кадри з фільмів, як-от «Зоряні війни» і «Це прекрасне життя».

Деякі майстри мозаїки люблять виходити за рамки обмежень щодо матеріалів. Доміношні мозаїки Кена Нолтона, Дональда Кнута та мої власні складаються не просто з окремих кісточок доміно, а з повних комплектів для гри. Нолтонів портрет Джозефа Скали (гравця в доміно) 1981 року було створено з 24 повних наборів подвійних дев'ятиочкових кісточок, тому він містить по 24 кісточки кожного типу: рівно 24 «пусто-пусто», рівно 24 «пусто-один» тощо. У моєму доміношному портреті 44-го президента США Обами, використано 44 комплекти. Портрет Гелен Келлер роботи Нолтона складається із 64 символів системи письма Брайля, і кожен із цих символів з'являється 16 разів. Мозаїка Кріса Джордана Denali/Denial упорядковує 24 000 (цифрово змінених) логотипів спортивного автомобіля Yukon Denali компанії *General Motors* (шість тижнів продажів 2004 року) у зображення гори Деналі (раніше відомої як Мак-Кінлі). А фотомозаїка Роберта Сільверса, що замовлена журналом *Newsweek* для обкладинки новорічного випуску 1997 року та зображує покійну принцесу Діану, сформована з тисяч світлин квітів. Усі ці художники використовують для проєктування своїх мозаїк комп'ютерне програмне забезпечення — зазвичай комп'ютерні програми, які вони самі розробляли.

Теоретично, можна створити фотомозаїку без програмного забезпечення. Ви можете зробити портрет свого колишнього вчителя, узявши фото зі щорічного шкільного альбому: виріжте світлини, а потім розташуйте в прямокутній сітці, щоби здалеку вони разом нагадували світлину вашого улюбленого педагога. Можливо, деякі світлини будуть яскравішими, а інші темнішими, і вам знадобиться гарне око, щоб оцінити яскравість кожної фотографії. Але навіть тоді вам буде важко визначити найкращу позицію для кожного фото. А ще ви можете зробити без програмного забезпечення мозаїку з доміно, надрукувавши цільове зображення на великому аркуші паперу, а потім розмістивши кісточки поверх відбитка: найяскравіші (дев'ять-дев'ять) на найсвітліші місця, а найтемніші (нуль-нуль, тобто пусто-пусто) — на найбільш темні. Хоча в цій ситуації зрозуміло, які кісточки яскравіші за інші, усе одно буде важко визначити, куди помістити кожну з них.

За допомогою математичної оптимізації досить легко створювати фотомозаїки й не дуже складно мозаїку й з доміно. Завдяки ній художник-математик (або математик-художник) може дослідити всілякі системи обмежень. Тож перед вами звіт про мої дослідження цього світу.

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

РОЗДІЛ 2

Плитки Трюше

Отець Себастьєн Трюше (1657–1729) вступив до ордену кармелітів у віці 17 років і вразив своїх начальників геніальністю щодо всього механічного. Надісланий до Парижу для подальшого навчання, блискучий Трюше привернув увагу оточення Людовика XIV після того, як король Англії Карл II подарував французькому монарху два годинники, й ані сам «Король-Сонце», ані його королівський годинникар не змогли зазирнути всередину. Тоді проконсультувались із 19-річним Трюше, і той швидко виявив, як працювати з механізмом і як виправити пошкодження, заподіяні попередніми спробами розблокування годинників.

За цей успіх Людовик XIV призначив Трюше значну пенсію, яка дозволила юнакові повністю заглибитись у вивчення «спочатку геометрії, необхідної для теорії механіки, а потім навіть анатомії та хімії, не нехтуючи нічим із того, що може бути корисним стосовно машин». Протягом життя Трюше був відомий і як найвидатніший експерт Франції в галузі гідравлічної техніки, і як чудовий винахідник. На прохання Людовика XIV він розробив систему водопроводу у Версалі та брав участь у будівництві або ремонті більшості французьких каналів. Одним із його винаходів стала машина, яка могла перевозити цілі дерева, не пошкоджуючи їх. Іншим — створеним командними зусиллями — був необмежено масштабований шрифт *Romain du Roi*. Але сьогодні Трюше пам'ятають не через ці великі досягнення. Натомість він відомий набором плиток, зображеним на рис. 2.1, який привернув його увагу, коли він перебував у місті Орлеан, інспектуючи канали.

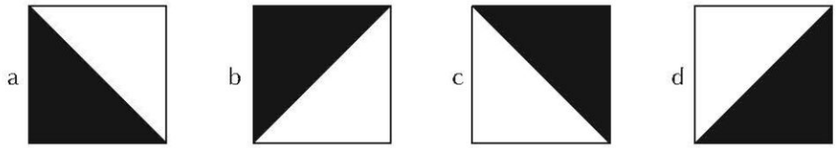

Рис. 2.1. Плитки Трюше

На перший погляд дивно, що ці прості квадратні плитки, кожну з яких розділено діагоналлю на дві половини — білу й чорну, не лише привернули увагу блискучого розуму Трюше, але потім утримували її досить довго, щоби надихнути видатного винахідника написати статтю *Mémoire sur les combinaisons* («Мемуари про сполучення») й 1704 року подати її для публікації в найпрестижніший академічний журнал свого часу *Memoires de l'Académie Royale de Sciences* («Мемуари Королівської академії наук»). Але зі статті Трюше чітко видно, що його захоплення було спричинене не самими плитками, а тим, як їх можна поєднувати, щоби створити більші візерунки. Основну частину статті він присвятив чудово вигравійованим рисункам, які демонструють «плідність цих поєднань, походження яких, проте, таке просте».

Рис. 2.2 (див. с. 18) відображає чотири шаблони Трюше разом із позначеннями, які він їм дав. Візерунок A використовує лише плитки типу a, тому ми можемо сказати, що візерунок A генерується плиткою a, і виразити це, написавши $A = (a)$. Візерунок C — це шахова дошка, сформована з плиток типів a й c. Її непарні рядки починаються з

$$a \quad c \quad a \quad c \quad \ldots,$$

а парні — з

$$c \quad a \quad c \quad a \quad \ldots$$

Якщо ми зосередимо свою увагу на блоках плиток розміром 2×2, починаючи з верхнього лівого кута, то побачимо, що візерунок C генерується блоком 2×2 $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$. Ми можемо це виразити, записавши $C = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$. Як і C, візерунок D має генератор 2×2, але на відміну від *нього* використовує всі чотири типи плитки. Ми можемо записати візерунок D як $D = \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ a & d \end{smallmatrix}\right)$. Візерунок E має генератор 4×4.

У статті Трюше наведено 26 додаткових візерунків, упорядкованих за збільшенням складності, а книжка 1722 року, написана його колегою-кармелітом отцем Домініком Дуа, містить набагато більшу кількість. Візерунок Дуа № 72, відтворений на рис. 2.3, набагато насиченіший за шаблони Трюше A, C, D та E. Частково через те, що він має набагато більший генератор — блок плиток розміром 12×12.

Дуа був в абсолютному захваті від плиток Трюше. Свою книжку він назвав *Methode pour fair une infinité de desseins di ffrens, avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonal* («Метод створення нескінченної кількості різних рисунків із квадратами, розділеними на два кольори діагональною лінією»).

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

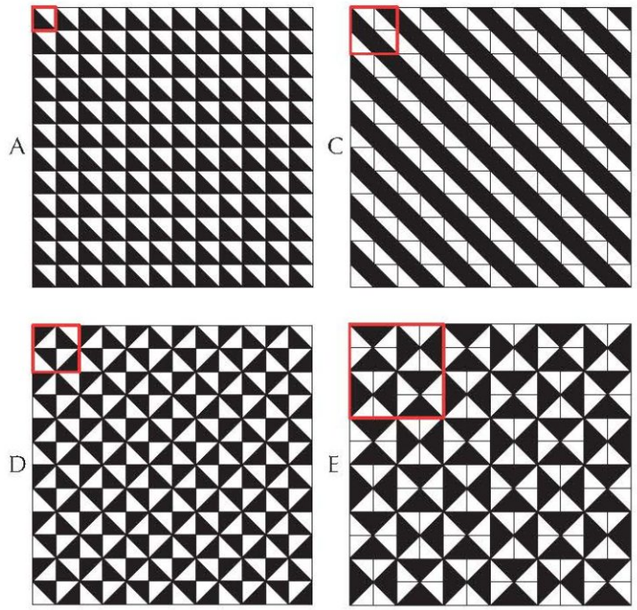

Рис. 2.2. Візерунки Трюше *A*, *C*, *D* та *E*

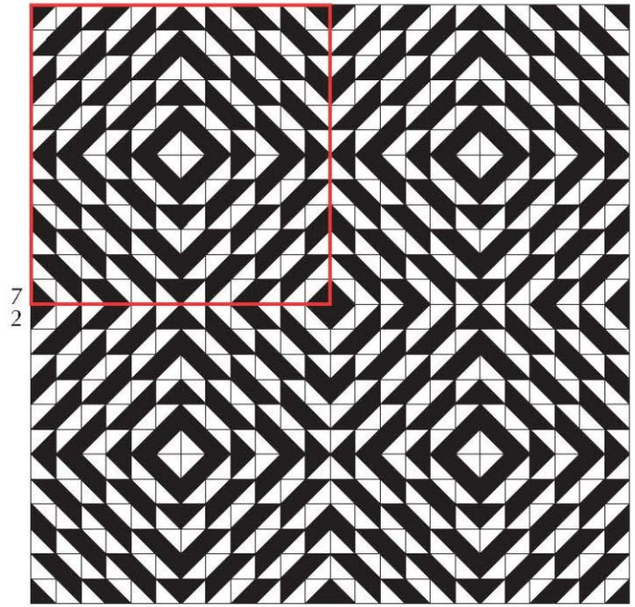

Рис. 2.3. Візерунок Дуа № 72

У передмові він не міг стримати свого хвилювання, зазначивши: «У цій книжці ви знайдете невичерпне джерело рисунків для мощення церков та інших будівель, плиткової підлоги та створення красивих приміщень. Художник отримає натхнення. Майстри інкрустації "маркетрі", теслярі, різьбярі мармуру та всі інші робітники знайдуть її дуже корисною. Вишивальниці, оббивники, ткачі — усі, хто працює на полотні або користується голкою,— навчаться робити красиві роботи».

Я цілком згоден із Дуа. Плитки Трюше справді чудові для створення абстрактних візерунків.

Рис. 2.4. Модифікована цифрова репродукція гравюри Анрі-Симона Томассена «Портрет отця Себастьєна Трюше» (1726), яка базувалася на живописному портреті роботи Елізабет Шерон ле Хей

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

Я був би в захваті від того, що візерунки Трюше *D* та *E* зображено на підлозі моєї кухні, і я хотів би стати постійним клієнтом готелю, який виявився б досить сміливим, щоби зобразити візерунок Дуа № 72 у своєму фоє.

Але водночас я повинен зазначити, що плитка Трюше не підходить для виготовлення художньої мозаїки, яка нагадує цільові зображення у відтінках сірого, що є моєю одержимістю й однією з основних тем цієї книжки.

За дизайном кожна плитка Трюше наполовину біла й наполовину чорна, тому будь-яка мозаїка, сформована з цих плиток, також буде наполовину білою й наполовину чорною. Якщо дивитися здалеку, будь-яка мозаїка, складена з плиток Трюше, найвірогідніше, буде здаватися виключно сірим прямокутником. Якщо ж ми хочемо створити мозаїку, що нагадувала б самого Трюше (див. рис. 2.4) — а я, безумовно, хочу! — нам потрібно буде використати інший набір плиток, який має додаткові відтінки яскравості.

Цільове зображення

Як показано на рис. 2.5, для кожного пікселя цільового зображення у відтінках сірого існує ціле число від 0 до 255, яке вказує, наскільки яскравим є піксель, причому 0 відповідає чорному, 255 — білому, а проміжні значення — різним відтінкам сірого. (У двійковій системі 255 записується як 11111111, що робить його найбільшим цілим числом, яке можна зберегти за допомогою одного байта — восьми бітів — комп'ютерної пам'яті.) Якщо в нас є достатньо місця для створення величезної мозаїки, ми можемо вибрати плитку для кожного окремого пікселя. Але зазвичай ми беремо меншу вибірку — групуємо пікселі на блоки розміром $k \times k$ (тут $k = 3$) й обираємо плитку для кожного блоку.

Для позначення блоків під час посилання ми використовуємо впорядковані пари символів. Блок (i, j) — це блок на перетині рядка i та стовпця j. Щоби виміряти яскравість блоку (i, j), ми обчислюємо середнє значення яскравості відтінків сірого його пікселів, а потім ділимо середнє на 255. Це дає нам значення яскравості блоку $\beta_{i,j}$, яке потрапляє кудись у замкнений інтервал [0, 1]. Як і раніше, 0 відповідає чорному, але тепер білому відповідає 1.

Для блоку (32, 34) — верхнього лівого кута тієї частини зображення, яка відповідає лівому оку Трюше,— середнє значення за шкалою сірого становить 154,11, тобто $\beta_{32,34} = 154{,}11/255 = 0{,}60$. Для блоку (36, 39), що в протилежному куті, середнє значення відтінків сірого становить 241,67, тому $\beta_{36,39} = 241{,}67/255 = 0{,}95$. Інакше кажучи, блок (32, 34) дещо яскравіший, ніж середньочастотний сірий (напівчорний — напівбілий), а блок (36, 39) досить яскравий — близький до чисто білого.

	34			35			36			37			38			39		
32	154	159	197	196	211	230	229	245	253	253	249	250	244	229	227	211	192	192
	144	147	175	176	179	183	182	195	201	201	211	215	213	207	207	201	194	194
	131	133	147	149	136	121	120	128	132	133	161	168	171	179	181	188	197	198
33	131	133	148	149	135	118	117	125	130	131	161	168	171	182	183	192	201	203
	125	124	111	112	104	94	93	94	93	94	118	124	124	125	124	135	145	146
	124	120	92	93	88	82	82	78	76	76	97	103	101	97	96	106	118	119
34	125	122	93	94	88	82	82	77	76	76	96	101	99	96	95	106	118	119
	178	173	132	132	120	104	105	85	76	75	72	72	72	73	71	98	125	127
	196	190	145	144	131	113	114	87	75	75	64	62	63	65	63	95	127	129
35	198	193	148	148	132	111	112	90	80	80	70	68	72	81	80	114	149	152
	209	204	160	161	138	110	110	98	94	94	86	82	94	122	125	167	213	216
	212	206	162	162	138	107	106	96	93	92	85	81	94	128	132	178	226	230
36	212	208	178	179	160	135	134	137	139	139	134	131	141	168	170	203	240	243
	212	210	198	199	184	166	165	182	189	190	188	186	193	213	215	235	253	254
	212	211	199	201	186	168	166	185	193	193	192	189	197	216	218	238	254	255

Рис. 2.5. Значення яскравості пікселів за шкалою сірого кольору

Еластичні плитки Трюше

Як уже згадувалося, кожна плитка Трюше наполовину чорна й наполовину біла.

Відповідно, беручи до уваги, що ми вважаємо чорний колір за 0, а білий за 1, ми присвоюємо кожній плитці значення *яскравості плитки* 0,5. Роблячи це, ми використовуємо площу (AREA) для визначення яскравості плитки, установлюючи:

яскравість плитки = 0 · AREA (чорна) + 1 · AREA (біла),

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>