ЗМІСТ

РОЗДІЛ III: Механічні хвилі

РОЗДІЛ IV: Електромагнітні хвилі

ВСТУП

«Усе тече, усе змінюється», — говорив давньогрецький філософ Геракліт з Ефеса. Можна додати, що в низці явищ ці зміни повторюються із плином часу. Точно так само чи приблизно так. У таких випадках ідеться про коливання. Вони стосуються усіх боків нашого життя. Добові коливання освітленості земної поверхні, морські припливи й відливи, сезонні коливання кількості листя на деревах. Навіть повторювані рік у рік коливання попиту на морозиво та прохолодні напої.

Коливальні процеси такі поширені, що натрапити на них можна у всіх розділах фізики. Це і механічні коливання маятників годинників, і невидимі теплові коливання атомів та іонів у вузлах кристалічної ґратки. Це періодичний рух поршнів у циліндрах двигунів внутрішнього згоряння. Це коливання електричних і магнітних полів у різних електричних колах і надрах атомів.

Коливання здатні ширитися простором як хвилі найрізноманітнішої природи — механічні, електромагнітні й навіть гравітаційні, які — до речі — виявлено нещодавно. Саме завдяки існуванню механічних хвиль ми можемо чути одне одного й насолоджуватися музикою, а завдяки електромагнітним хвилям — бачити красу довкілля й пізнавати його не тільки розумом, а й почуттями.

От чому ми спеціально створили окремий том, присвячений вивченню коливальних і хвильових процесів.

ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

1 урок

Геніальний фізик Ісаак Ньютон свого часу здійснював різні дослідження і створював математичний апарат для власних потреб. Наприклад, під час вивчення руху Місяця він вивів формулу для доцентрового прискорення. І математика в цьому випадку виявилася саме таким необхідним йому інструментом. У цьому томі «Фізики» ми почнемо розгляд коливального руху. Це складніший вид руху порівняно з тим, що ми вивчали раніше, й складність пов'язана з присутністю більш складної математики. Щоб надалі все було простіше й зрозуміліше, у першому розділі трохи відступимо від фізики та здійснимо «ліквідацію математичної неписьменності» — ознайомимося з елементами диференціального числення.

Між різними явищами дуже часто спостерігається причинно-наслідковий зв'язок. І ці явища описують за допомогою різних величин. Тому й між фізичними величинами теж існують зв'язки, які математики описують різними функціями. Функціональний зв'язок свідчить, що кожному значенню однієї величини відповідає значення іншої величини. Наприклад, якщо

$y = x^2$, до кожного значення x добирається відповідне за таким законом значення y. Математики в подібних випадках говорять, що величина y є функцією величини x:

$$y = f(x).$$

Традиційно кажуть, що x — незалежна змінна, y — змінна залежна. І якщо змінити x, зміниться також y. Припустімо, що y прикладі $y = x^2$ значення x змінилося від 1 до 2, й тоді y дорівнює вже 4, тобто в цьому випадку він зміниться на 3. Цю зміну можна назвати приростом функції та позначити Δy. Такий приріст спричинено зміною незалежної змінної. Зміну величини x можемо позначити Δx і говоритимемо, що це приріст незалежної змінної, або **аргументу**. Якщо ж візьмемо різні функції, або навіть одну й ту саму, як у нашому прикладі, й вивчатимемо приріст функції за одного й того самого приросту аргументу, але за різних його початкових значень x, матимемо різний приріст функції. Наприклад, якщо x змінюється від 1 до 2, то y — від 1 до 4, тобто на 3. А якщо х змінюється від 2 до 3, y — уже від 4 до 9, тобто на 5. Отже, за одного й того самого приросту аргументу функція може змінюватися по-різному залежно від початкової точки.

Припустімо, початкове значення аргументу в нас x_0, тоді після збільшення аргументу на Δx отримаємо значення $x_0 + \Delta x$. Можемо зазначити, чому дорівнюватиме приріст функції:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст функції залежатиме від значення Δx.

Розгляньмо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Це відношення залежить від того, яке ми беремо Δx. Та виявляється, що в більшості випадків, якщо ми зменшуватимемо Δx, це відношення прямуватиме до певного числа — сягатиме певної *границі*. Математики позначають це так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ця границя нам уже траплялася під час вивчення поняття миттєвої швидкості. Ми говорили, що миттєва швидкість — це відношення малого переміщення на ділянці траєкторії, що включає певну точку, до величини проміжку часу, за який сталося це переміщення. І коли ми спрямували проміжок часу до нуля, середня швидкість на цій ділянці прямувала до миттєвої. Наше перше відношення — це середня швидкість зміни функції, а друге відношення — миттєва швидкість зміни функції. Така величина має назву **похідної функції** в точці x_0. А похідна функції в точці — це число, яке позначається $y'(x_0)$. Тобто

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отже, похідна функції в точці є границею відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля. Така границя у фізиці існує практично завжди.

Процес обчислення похідної називається **диференціюванням**. Функції, що мають похідну, називаються *дифернційовними функціями*. Крім того, існує ще одне позначення похідної:

$$y'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

Де dy і dx — *диференціали*, або нескінченно малі прирости функції та аргументу.

Слід пам'ятати, що похідна залежить від того, в якій точці ми її обчислюємо. Тому можна сказати, що похідна функції теж є функцією, тільки іншого виду. І наше завдання — навчитися обчислювати похідні в різних найпростіших випадках.

Розгляньмо найпростішу функцію — лінійну:

$$y = kx + C.$$

Обчислимо її похідну — y'. Щоб знайти похідну, необхідно приріст аргументу розмістити в знаменнику, приріст функції — у чисельнику та подивитися, що стається з цим дробом, коли приріст прямує до нуля:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\,k\,(x + \Delta x) + C\,] - [\,kx + C\,]}{\Delta x} = \frac{[\,kx + k\Delta x + C - kx - C\,]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Цікаво, що незалежно від того, якою є величина Δx, відношення приросту функції до приросту аргументу залишається незмінним. Це властивість лінійної функції. Тоді можемо записати:

$$(\,kx + C\,)' = k.$$

Розгляньмо випадок, коли $k = 0$. У цьому випадку функція виявиться просто C. Звідси випливає, що $C' = 0$. Запам'ятаємо: якщо функція є постійною величиною, її похідна дорівнює нулю. Якщо ж $k = 1$, а $C = 0$, тоді $y = x$, а $(x)' = 1$.

Запам'ятаємо: похідна аргументу — завжди одиниця.

Розгляньмо ще один приклад: функцію $y = x^3$. Ми вже знаємо, що спершу потрібно знайти відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

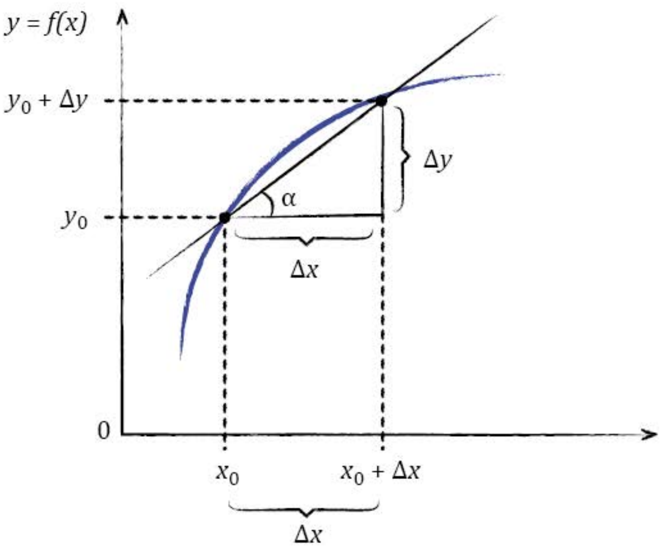
Знайдімо похідну, що є границею цього відношення, коли Δx прямує до нуля:

$$(x^3)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right).$$

Спрямуємо Δx до нуля та отримаємо результат:

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Розгляньмо тепер геометричне значення похідної. Для цього передовсім зобразимо графік функції, похідну якої шукатимемо. Припустімо, що графік має вигляд як на рисунку. Значенню аргументу x_0 відповідатиме значення функції y_0. Це координати точки на нашому графіку. Якщо збільшимо аргумент на Δx, функція змінить своє значення й дорівнюватиме $y_0 + \Delta y$. Це координати іншої точки. Проведімо пряму, що проходить через ці дві точки графіка — це буде січна до кривої, що зображує графік функції (графік 1).



Графік 1