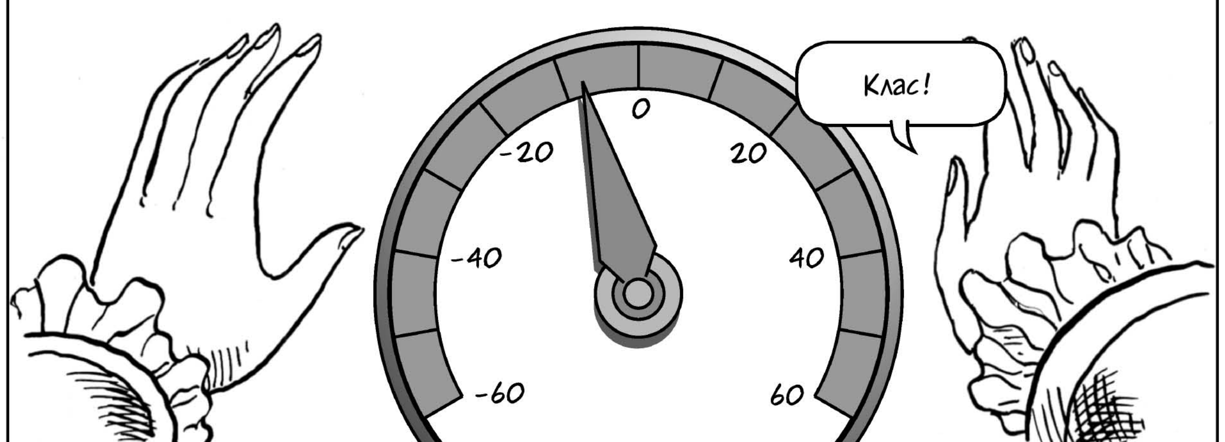
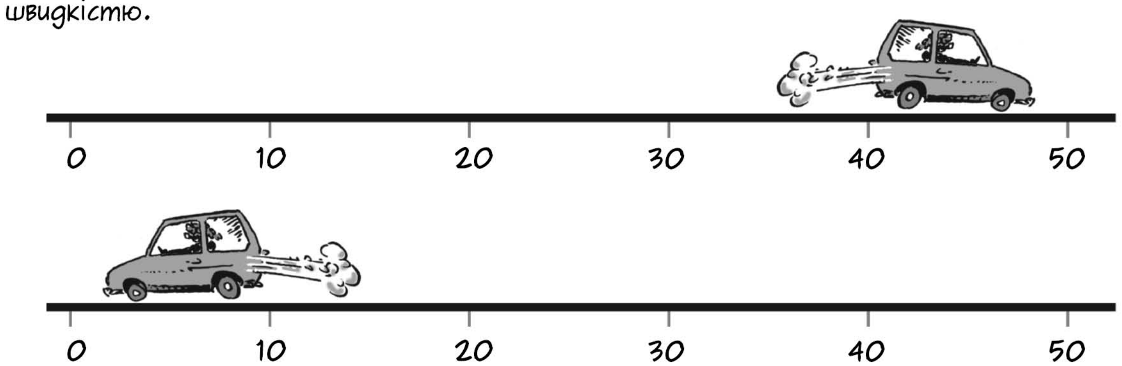
Варто зауважити, що Ньютон і Лейбніц непогано міркували, якщо взяти до уваги, що спідометри винайшли тільки через 200 років!

А як наші два генії до цього додумалися? Щоб дізнатися, давайте подивимося на показники спідометра в автомобілі.

Насправді нам потрібен прилад, який вимірюватиме не швидкість, а швидкість разом з напрямком — назвемо його **ШВИДКОМІР**. Він схожий на спідометр, але в нього на шкалі є ще й **ВІД'ЄМНІ ЗНАЧЕННЯ** для тих випадків, коли автомобіль їде назад.



Щоб зрозуміти, чим різняться звичайна швидкість і швидкість з переміщення, уявіть собі машину, яка рівномірно рухається протягом години і за цю годину долає 50 км. Потім вона розвертається і їде назад (у «від'ємному» напрямку) протягом години з тією самою швидкістю.



ШВИДКІСТЬ завжди дорівнює 50 км/год, і наша машина проїхала загалом **ВІДСТАНЬ** 100 км — 50 км туди і 50 км назад. Відстань дорівнює швидкості, помноженій на час:

Загальна відстань = швидкість · витрачений час =

= 50 км/год · 2 год =

= 100 км

СЕРЕДНЯ ШВИДКІСТЬ дорівнює **ЗАГАЛЬНІЙ ВІДСТАНІ,** поділеній на час:

$$\text{Швидкість}_с = \frac{\text{загальна відстань}}{\text{витрачений час}} =$$

$$= \frac{100 \text{ км}}{2 \text{ год}} = \mathbf{50} \text{ км/год}$$

Але якщо розглянемо **ШВИДКІСТЬ З ПЕРЕМІЩЕННЯ,** то першу годину машина їде зі швидкістю 50 км/год, а другу — зі швидкістю **–50 км/год!** У результаті положення машини не змінилося. **СУМАРНА ЗМІНА ДОРІВНЮЄ НУЛЮ** — машина в результаті виявилася там само, звідки виїхала!

СЕРЕДНЯ ШВИДКІСТЬ З ПЕРЕМІЩЕННЯ дорівнює **ЗМІНІ ПОЛОЖЕННЯ,** поділеній на час.

$$v_с = \frac{\text{зміна положення}}{\text{витрачений час}}$$

У цьому разі

$$v_с = \frac{0 \text{ км}}{2 \text{ год}} = \mathbf{0} \text{ км/год!}$$

Область визначення функції зазвичай описують за допомогою **ПРОМІЖКІВ** або чисел. Для двох чисел a і b, таких, що $a < b$, ми будемо використовувати такі позначення:

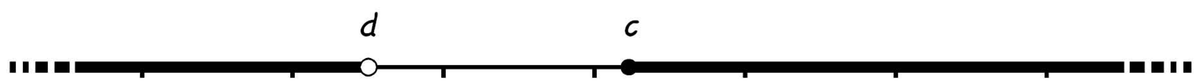
$(a; b)$ — **ВІДКРИТИЙ** проміжок від a до b, тобто всі числа, що лежать між a і b, **ЗА ВИНЯТКОМ** кінцевих точок, тобто самих a і b.

$(a; b)$ — усі x такі, що $a < x < b$

$[a; b]$ — **ЗАКРИТИЙ** проміжок від a до b, тобто всі числа, що лежать між a і b, разом із кінцевими точками, тобто a і b.

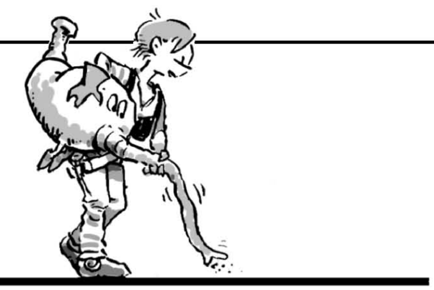
$[a; b]$ — усі x такі, що $a \le x \le b$

НЕСКІНЧЕННИЙ проміжок — це сукупність усіх чисел, що перевищують деяке число c. Ми записуємо його як $[c; \infty)$, якщо c входить у проміжок, і $(c; \infty)$, якщо c не входить. З другого боку це буде $(-\infty; d]$ і $(-\infty; d)$ відповідно. Знак нескінченності не позначає жодного певного числа, його ввели, щоб записувати такі випадки. Нескінченність ніколи не включається в числовий проміжок — адже це не число!

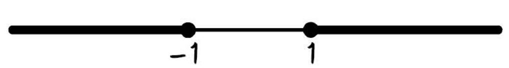


$(-\infty; d)$ — усі x такі, що $x < d$.

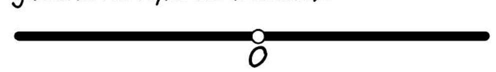
$[c; \infty)$ — усі x такі, що $c \le x$.



Користуючись проміжками, можна сказати, що областю визначення функції $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ є вся числова пряма за межами проміжку $(-1; 1)$.

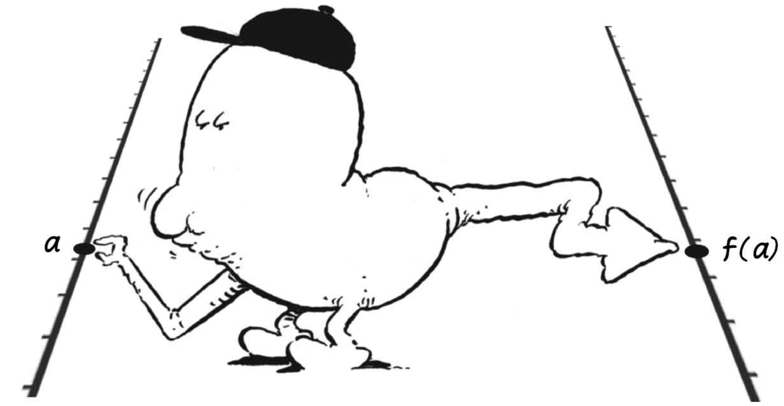


Областю визначення функції $g(x) = \frac{1}{x}$ є всі числа x такі, що $x \ne 0$ (оскільки ділити на нуль не можна).

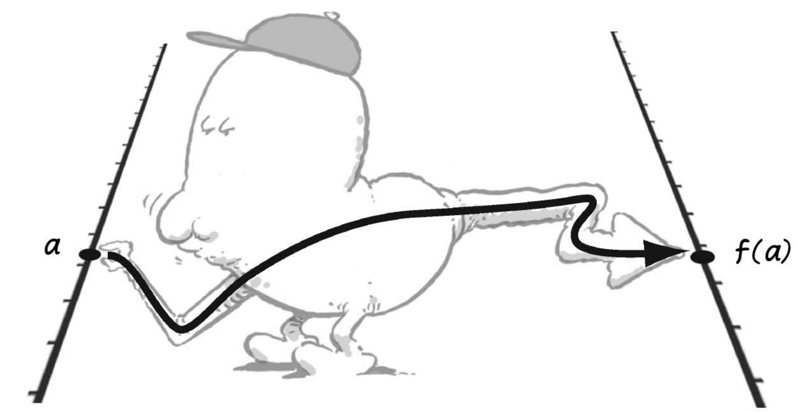


Областю визначення функції $P(x) = x^2 + 3$ є всі дійсні числа без винятків.

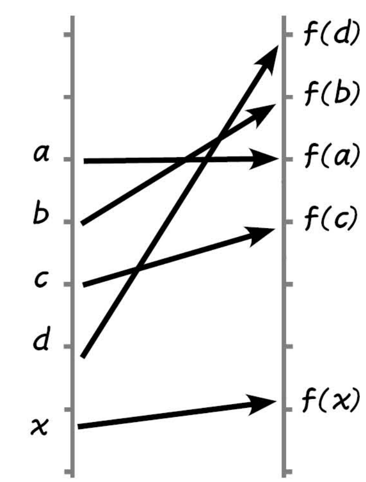
А тепер повернімося до образу функції, що бере вхідні значення з однієї числової прямої і вказує на результат на другій числовій прямій.



Якщо хочете, можна стерти придуману нами істоту і зосередитися на самому процесі **ВКАЗУВАННЯ**.



Тоді функція буде просто як **НАБІР СТРІЛОК, ЩО** вказують з однієї числової прямої на другу. З кожного x в області визначення f виходить лише одна стрілка і показує на другій прямій значення $f(x)$.



Приклади похідних, які можна знайти за допомогою ланцюгового правила

1. $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$, де m і n — цілі числа.

$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, отже,

внутрішня функція: $u(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $u'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

зовнішня функція: $v(u) = u^m$, $v'(u) = mu^{m-1}$.

$$h'(x) = u'(x)v'(u(x)) = (\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1})(mu^{m-1})$$

$$= (\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1})(m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1})$$

$$= \frac{m}{n}x^{(\frac{1-n}{n}+\frac{m-1}{n})} =$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

2. $f(x) = arctg(3x)$.

Внутрішня функція: $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$.

Зовнішня функція: $v(u) = arctg\, u$, $v'(u) = \frac{1}{1+u^2}$

$$f'(x) = u'(x)v'(u(x)) = \frac{3}{1+u^2} =$$

$$= \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$$

3. $g(x) = f(ax)$, де a — константа.

Внутрішня функція: $u(x) = ax$, зовнішня функція f, отже,

$$g'(x) = af'(ax).$$

4. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Внутрішня функція: $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$.

Зовнішня функція: $v(u) = u^{\frac{1}{2}}$, $v'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$.

$$F'(x) = -2x(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}) = -2x(\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. $G(x) = ln(x^2 + x)$.

Внутрішня функція: $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$.

Зовнішня функція: $v(u) = ln\, u$, $v'(u) = 1/u$.

$$G'(x) = (2x+1)(1/u) =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x}$$

6. $P(t) = (2 + t + 2t^3)^{5/6}$.

Внутрішня функція: $u(x) = 2 + t + 2t^3$, $u'(x) = 1 + 6t^2$.

Зовнішня функція: $v(u) = u^{5/6}$, $v'(u) = \frac{5}{6}u^{-1/6}$.

$$P'(t) = (1+6t^2)(\frac{5}{6}u^{-1/6}) =$$

$$= \frac{5}{6}(1+6t^2)(2+t+2t^3)^{-1/6}$$

7. $U(x) = (f(x))^n$ для будь-якої диференційованої функції f і будь-якого раціонального n.

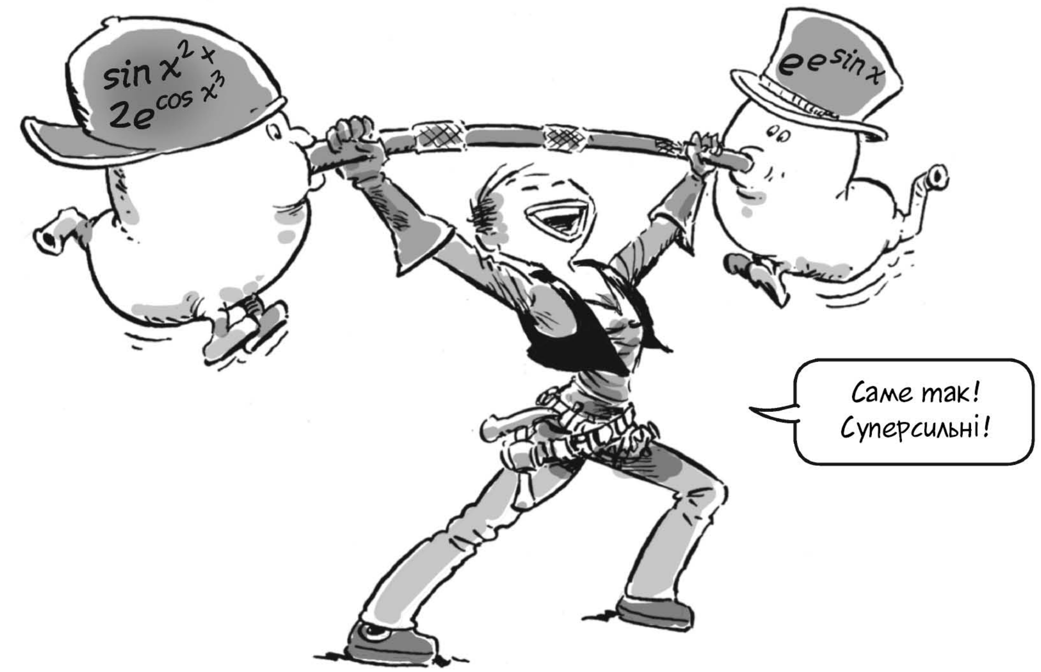
Внутрішня функція $f(x)$, похідна $f'(x)$.

Зовнішня функція: $v(u) = u^n$, $v'(u) = nu^{n-1}$.

$$U'(x) = f'(x)(nu^{n-1}) =$$

$$= nf'(x)(f(x))^{n-1}.$$

Ось ми вже знайшли похідні всіх елементарних функцій... На їхній основі можна знайти похідну будь-якої функції, отриманої поєднанням елементарних функцій за допомогою додавання, множення, ділення і композиції. Тепер ми сильні!

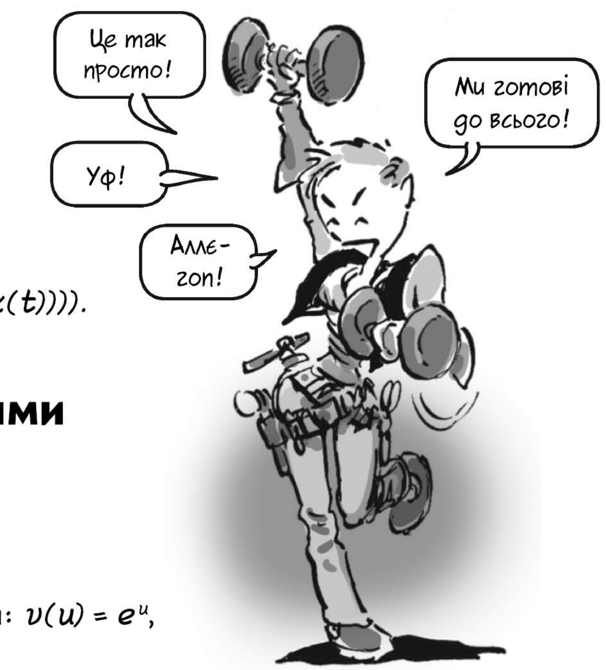


І тепер ми вміємо диференціювати ланцюжки, довші за дві функції: треба просто перемножити всі похідні!

$$\frac{d}{dt}v(u(y(x(t)))) \frac{dv}{du}\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Або, якщо ви полюбляєте іншу систему запису: якщо $f(t) = v(u(y(x(t))))$, то

$$f'(t) = x'(t)y'(x(t))u'(y(x(t)))v'(u(y(x(t)))).$$



Приклад з трьома функціями

$$\frac{d}{dx}\sin(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})$$

Внутрішня функція: $u(x) = x^2$, середня функція: $v(u) = e^u$, зовнішня функція: $g(v) = sin\, v$.